ASPETTI DI GENERALIZZAZIONE IN EARLY ALGEBRA

Annalisa Cusi Giancarlo Navarra

GREM Università di Modena e Reggio Emilia

Nell'articolo presenteremo gli studi più recenti sviluppati all'interno del nostro progetto di ricerca nella cornice teorica dell'early algebra con alunni di età compresa fra i 5 e i 14 anni. Illustreremo un primo inventario di condizioni che possono favorire la costruzione di basi significative da diversi punti di vista (linguistico, percettivo, sociale, matematico) per supportare in alunni giovani il graduale approccio alla generalizzazione.

INTRODUZIONE: GENERALIZZAZIONE ED EARLY ALGEBRA

Tradizionalmente, la maggior parte dei curricoli separa lo studio dell'aritmetica, rivolto prevalentemente alla scuola primaria, da quello dell'algebra, ritenuto idoneo per la secondaria. Tuttavia, molte ricerche hanno dimostrato gli effetti negativi di una transizione troppo veloce dall'aritmetica alla manipolazione simbolica. Warren et al. (2006), ad esempio, suggeriscono che attività algebriche possano essere svolte in età precoce e che questo tipo di esperienze, proposte dagli insegnanti attraverso azione adeguate, possano aiutare gli studenti in questa fase di transizione così complessa. Anche Blanton e Kaput (2011) hanno sottolineato l'importanza di offrire ai bambini opportunità di *iniziare* a utilizzare rappresentazioni simboliche fin dal primo anno della scuola primaria al fine di far acquisire quelle idee di base che permettano loro di esplorare facilmente le idee più complesse negli stadi successivi. Da queste idee si è sviluppata l'*early algebra*, che sta assumendo i caratteri di una vera e propria *nuova disciplina* (Kaput et Al. 2007), all'interno della quale si è sviluppato il Progetto ArAl (Malara e Navarra, 2003)[1]. L'ipotesi dell'early algebra è che il normale percorso 'dall'aritmetica all'algebra' sia troppo limitante (Smith & Thompson, 2007) e che pertanto dovrebbe essere riformulato in modo da dare agli studenti l'opportunità di incontrare il pensiero algebrico sin dal momento in cui sviluppano le prime attività in ambito aritmetico. Questo non significa portare il curricolo di algebra nella scuola primaria, ma *riformare il modo in cui si dovrebbe concepire e insegnare l'aritmetica* promuovendo il passaggio da una concezione *procedurale* di questa ad una concezione *relazionale* e *strutturale*. Riteniamo che sia anche necessario ridefinire cosa significhi, a questo livello, promuovere lo sviluppo del pensiero algebrico. Condividiamo la visione di Radford (2011), secondo il quale l'uso di notazioni non è né necessario né condizione sufficiente per *pensare algebricamente,* e il pensiero algebrico si

---

[1] *Progetto ArAl: Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero prealgebrico*; progetto a diffusione nazionale sviluppato all'interno del GREM (Gruppo di Ricerca in Educazione Matematica) diretto da Nicolina A. Malara presso il Dipartimento di Matematica dell'università di Modena e Reggio Emilia (Italia) e coordinato da G. Navarra.

caratterizza per il modo specifico in cui si esso guarda agli oggetti del discorso. L'autore suggerisce che il pensiero algebrico si abbia quando le quantità indeterminate sono concepite in modo analitico (cioè quando esse vengono trattate come se fossero conosciute ed si effettuassero calcoli con esse come si fa con i numeri noti).

Fare early algebra comporta dunque, per gli insegnanti, offrire ai loro alunni l'opportunità di attivare modi di pensare come: analizzare le relazioni fra quantità, studiare i cambiamenti, generalizzare, esplorare situazioni problematiche stimolanti, modellizzare, giustificare, provare, prevedere.

La generalizzazione è considerata un importante fattore di crescita del pensiero algebrico e una preparazione per l'apprendimento successivo dell'algebra (Cooper and Warren, 2011). Un ambiente ricco dal punto di vista dei significati che possono essere veicolati, e quindi potenzialmente idoneo a stimolare processi di generalizzazione è, ad esempio, quello della ricerca di regolarità (v. § D2). In esso gli allievi hanno modo di sperimentare un aspetto fondamentale nei processi di generalizzazione: vedere una generalità attraverso il particolare e vedere il particolare nel generale (Mason, 1996). Inoltre, Cooper e Warren (2011) suggeriscono che, durante queste particolari attività, un passo verso la generalizzazione completa in linguaggio naturale e la notazione algebrica sia la *quasi-generalizzazione*, in cui gli studenti sono in grado di esprimere la generalizzazione in termini di numeri specifici e possono applicare una generalizzazione a molti numeri, e anche ad un esempio di 'numero qualsiasi'.

L'insegnante che opera nell'ambito dell'early algebra svolge un ruolo cruciale nella gestione dei fattori che favoriscono l'approccio alla generalizzazione e nella scelta delle situazione problematiche; il suo approccio a queste attività risulta a sua volta strettamente connesso alle sue convinzioni profonde. Tali convinzioni emergono dallo studio dei transcripts raccolti fra il 2004 e il 2011 (circa 4500) attraverso la *Multicommented Transcripts Methodology (MTM)* [2]. Il ripetersi di molti commenti, soprattutto in ambito metodologico, indipendentemente dall'età degli alunni (fra i 5 e i 15 anni), li rende *specchi di molti dei comportamenti più diffusi fra gli insegnanti*. Numerosi commenti si riferiscono alla generalizzazione da differenti punti di vista e permettono di individuare un provvisorio, ma sufficientemente dettagliato, *inventario* che illustreremo nella seconda parte dell'articolo. Prima di farlo, introduciamo alcuni aspetti teorici che fanno da cornice ai temi dell'inventario ed esprimono le nostre concezioni in merito all'early algebra e, in particolare, ai suoi aspetti più strettamente connessi ai processi di generalizzazione.

[2] La MTM si è sviluppata all'interno del Progetto ArAl. Prevede che i docenti coinvolti nel progetto trascrivano le audio-registrazioni di alcune loro lezioni. Le trascrizioni vengono commentate dagli stessi autori e da uno o più E-tutor in veste di commentatori (ricercatori universitari, insegnanti ricercatori, altri insegnanti) e quindi condivise via E-mail e in incontri in presenza dai membri di uno o più gruppi.

IL NOSTRO APPROCCIO ALL'EARLY ALGEBRA

La nostra prospettiva nell'approccio all'early algebra è *linguistica e metacognitiva* e si basa sull'ipotesi che ci sia una forte analogia tra le modalità di apprendimento del linguaggio naturale e del linguaggio algebrico (Cusi, Malara, Navarra, 2011). Per spiegare questo punto di vista, facciamo uso della metafora del *balbettio algebrico*. Indichiamo con questa metafora quel processo attraverso il quale l'alunno può avvicinarsi al controllo *semantico* prima, e *sintattico* poi, del linguaggio matematico con modalità analoghe a quelle che caratterizzano l'apprendimento della lingua madre, cominciando dalla scoperta dei significati e dall'apprendimento graduale, 'sporco', creativo delle regole, sino alle riflessioni, in età scolare, sulla struttura del linguaggio. Stimolare questo processo richiede di costruire un ambiente che stimoli l'elaborazione autonoma di codifiche formali da negoziare attraverso la discussione e l'appropriazione sperimentale graduale dell'algebra come nuovo linguaggio, le cui regole trovino la loro collocazione all'interno di un contratto didattico tollerante verso momenti iniziali sintatticamente 'promiscui'.

Un altro aspetto fondamentale nel nostro approccio all'early algebra è perciò il riconoscimento delle potenzialità che il rapporto tra le capacità di *argomentare* e di *generalizzare* ha nella costruzione sociale della conoscenza. Condizione necessaria perché questo rapporto si espliciti è che l'argomentazione rappresenti per insegnante e alunni un valore condiviso, aiuti cioè l'alunno a comprendere come la parola affini la sua capacità di *riflettere su ciò che dice*. Inoltre parlare collegando fra loro casi particolari aiuta a superare proprio la loro individualità perché permette di rendere *trasparenti* le loro affinità facendo emergere gradualmente la consapevolezza del filo logico *generale* che le unisce.

Un altro aspetto cruciale è condurre gli allievi a riconoscere e ad interpretare *rappresentazioni canoniche e non canoniche* dei numeri[3] allo scopo di costruire con essi le basi semantiche per la comprensione delle espressioni algebriche. Le rappresentazioni non canoniche sono dei *traghetti semantici* verso la generalizzazione. Daremo un esempio in questo senso nel § A2.

Poiché la prospettiva dell'early algebra favorisce l'approccio alla scrittura algebrica come conquista costantemente supportata dalla *verbalizzazione,* un aspetto nodale è costituito dalla comprensione della necessità del *rispetto delle regole* nell'uso del linguaggio matematico. Mentre gli alunni interiorizzano dalla nascita che il rispetto delle regole relative alla lingua madre è funzionale alla comunicazione, è difficile per loro trasferire al linguaggio matematico questa peculiarità. È necessario quindi aiutarli a comprendere che anche il linguaggio matematico, come tutti i linguaggi elaborati dall'uomo, è un sistema finito di simboli arbitrari combinati secondo precise regole sintattiche *che bisogna*

---

[3] Tra le possibili rappresentazioni di un numero una (per esempio 12) è il suo nome, chiamato forma canonica, tutti gli altri (3×4, (2+2)×3, 36/3, 10+2, ...) sono le sue forme non canoniche, e ciascuno di esse acquisterà senso in relazione al contesto e al processo soggiacente.

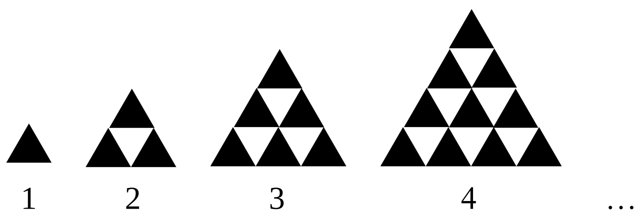
rispettare. Questo fa nascere l'esigenza di creare dei *mediatori linguistici* che obblighino al rispetto delle regole per comunicare con loro in linguaggio matematico concetti anche evoluti, proiettati verso la generalizzazione[4].

FATTORI CHE CONTRIBUISCONO A COSTRUIRE IN ALUNNI GIOVANI LE BASI SEMANTICHE PER LA GENERALIZZAZIONE

Affrontare la *Generalization in mathematics at all educational levels* conduce chi come noi sviluppa le proprie ricerche nell'ambiente dell'early algebra con alunni di età compresa fra i 5 e i 14 anni, ad esplorare quali siano gli ambiti, le metodologie, gli atteggiamenti che – da diversi punti di vista: linguistico, percettivo, sociale, matematico - possano favorire la costruzione di premesse significative per un approccio graduale alle ricchezze e alle difficoltà presentate dalla generalizzazione ai livelli di età successivi. Presentiamo qui di seguito, attraverso degli esempi, un primo inventario di situazioni che illustrino tali premesse, desunto dall'analisi di più di 4000 commenti prodotti all'interno della *Multicommented Transcripts Methodology* sviluppata nel Progetto ArAl.

A1. Generalizzazione e linguaggio: il ruolo dell'argomentazione

In una classe (11 anni) abituata all'argomentazione si esplora una serie di disegni (detti 'piramidi') con lo scopo di individuare delle leggi generali che pongano in relazione le caratteristiche di una figura (numero totale dei triangoli, delle file, dei triangoli bianchi e così via) con il relativo numero di posto. In questo caso si cerca una legge generale per trovare il numero di triangoli neri della fila di base.



Un'alunna si lancia in un intervento lunghissimo: "Sulla linea dove si appoggiano le piramidi… per esempio nella quarta piramide i triangoli neri sono quattro e quelli bianchi tre… la mia piramide di sei piani ha sulla base sei triangoli neri e cinque bianchi… I bianchi sono sempre uno meno dei neri… Forse una piramide con un qualsiasi numero di piani ha i triangoli neri sulla base che sono uguali al numero dei piani e i bianchi sono tanti quanti i neri meno uno". L'insegnante autrice del diario commenta: "Ylenia non era giunta a questa considerazione prima del suo intervento ma, *mentre verbalizzava, deduceva ed esprimeva la regola generale*".

L'esempio evidenzia come il rapporto fra capacità di argomentare e capacità di generalizzare sia una potenzialità fondamentale nella costruzione sociale della conoscenza. Condizione necessaria perché questo rapporto si espliciti è che

[4] Nel Progetto ArAl, come mediatore linguistico, si utilizza la figura di Brioshi, un alunno giapponese virtuale, conoscitore solo della sua lingua madre ma competente nell'uso del linguaggio matematico. Brioshi è l'amico di penna algebrico (algebraic pen friend) con cui si comunica attraverso uno scambio di frasi matematiche che, per essere comprensibili, devono riflettere un uso consapevole delle regole sintattiche che lui condivide (Malara e Navarra, 2001).

l’argomentazione rappresenti per insegnante e alunni un valore condiviso: ognuno, in base alle sue possibilità, si mette in gioco e si relaziona con il mettersi in gioco degli altri. Questo significa per l’alunno *assumersi la responsabilità del proprio apprendimento*. L’insegnante favorisce il fatto che Ylenia e i suoi compagni costruiscano *pubblicamente* la loro conoscenza. Si potrebbe dire che la ricchezza maggiore che emerge dall’argomentazione sia che colui che la costruisce *non conosce davvero le sue idee fintantoché non le esprime*. Man mano che l’argomentare diventa un’abitudine l’alunno comprende il valore ed il ruolo della parola: è il parlare sui fatti collegandoli che rende *trasparenti* le loro affinità facendo emergere gradualmente la consapevolezza del filo logico *generale* che le unisce.

A2. Generalizzazione e linguaggio: il *generale potenziale*

In attività con le ‘piramidi di numeri’ (ad ogni coppia di numeri scritti in due ‘mattoni’ affiancati corrisponde la loro somma nel mattone della fila di sopra ‘a cavallo’ fra essi) l’insegnante guida la classe verso l’individuazione della ‘legge’ che permette di esprimere il numero nel mattone in alto in una piramide a tre piani in funzione dei tre numeri alla base senza eseguire i calcoli intermedi.

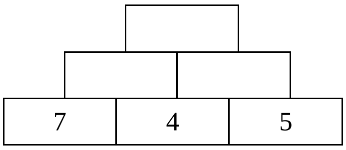


Fig.2a

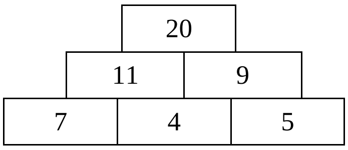


Fig.2b

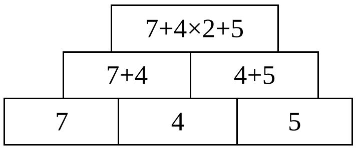


Fig.2c

Per individuare la regola il completamento ‘classico’ (Fig.2b) non è sufficiente per organizzare una risposta in quanto conduce ad un risultato (20) per così dire *inespressivo*. Le rappresentazioni *non canoniche* (Fig.2c) permettono invece di costruire una definizione *relazionale ontologica* del numero in alto – che esprima ciò che esso è - che costituisce l’esplicitazione in linguaggio naturale della legge generale cercata: “Il numero in alto è la somma fra i due numeri laterali e il doppio del numero centrale”. Il passaggio successivo è dato dalla traduzione della frase in linguaggio aritmetico $20=7+4\times2+5$. Il passaggio conclusivo è dato dalla comprensione che la frase in linguaggio naturale presenta un *generale potenziale* attraverso il quale si conquista la sua traduzione in linguaggio algebrico: $n=a+2b+c$. A proposito dell’uso della lettera in matematica, riteniamo che la vera difficoltà, di natura epistemologica, riguarda *la possibilità stessa di concepire la lettera in matematica come numero*. Potrebbe essere questa la reale barriera – per molti, forse, insormontabile - verso la comprensione dell’algebra e del suo linguaggio, e quindi della generalizzazione. Il concetto di *generale potenziale* si può porre in relazione con le nozioni di *quasi-variabile* (Fuji e Stephens 2001) e *quasi-generalizzazione* (Cooper e Warren, 2011) come ponti fra l’aritmetica e la notazione algebrica con alunni fra in 6 e i 14 anni. Questo conduce ad un altro costrutto a nostro avviso essenziale nella costruzione in alunni giovani di premesse concettuali e metodologiche significative per l’approccio alla generalizzazione.

A3. Generalizzazione e linguaggio: l'alunno come *produttore di pensiero*

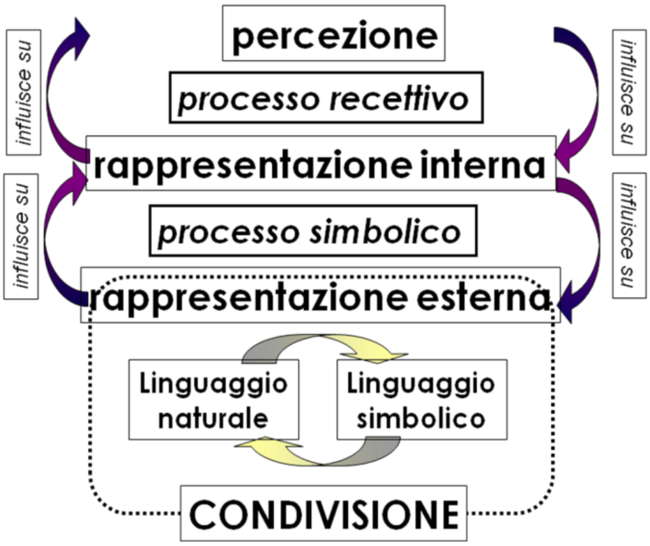
Nel precedente esempio delle piramidi di mattoni, la 'legge'individuata come abbiamo visto è: "Il numero in alto è la somma fra i due numeri laterali e il doppio del numero centrale". Questa conclusione costituisce un importante momento di *coagulo* nell'evoluzione del balbettio algebrico. Gli alunni sono stati guidati verso la costruzione collettiva di una definizione generale, pur migliorabile, e l'hanno esplicitata. Sono stati protagonisti nella veste di *produttori di pensiero matematico 'originale': io* esprimo con un linguaggio chiaro e sintetico ciò che *io* ho capito e *io* ho detto pubblicamente. Tradizionalmente invece è l'insegnante a fare da tramite fra momenti topici del pensiero matematico istituzionale (principi, teoremi, proprietà, eccetera) e la loro applicazione; in questi casi gli alunni sono quindi prevalentemente dei *riproduttori* di una teoria alla cui organizzazione sono fondamentalmente estranei. È molto importante invece, che gli alunni siano educati, attraverso forme di esplorazione collettiva di situazioni problematiche stimolanti, *a produrre in linguaggio naturale delle conclusioni generali da condividere con i compagni e l'insegnante*, organizzandole in modo coerente e comunicabile, come fase intermedia verso la successiva *traduzione* in linguaggio matematico.

B. Generalizzazione e percezione

La *percezione*, cioè il processo psichico che opera la sintesi dei dati sensoriali in forme dotate di significato, sviluppata in un contesto *socio-costruttivista*, contribuisce a costruire delle premesse significative per l'approccio alla generalizzazione. Se per esempio si chiede di esprimere le proprie strategie di calcolo per individuare il numero delle perle di questa collana:

○○●●●○○●●●○○●●●○○●●●○○●●●○○●●●○○●●●○○●●●○○●●●

si delineano due diverse percezioni che conducono a due diverse rappresentazioni delle strategie di conteggio (v. anche su questo aspetto il § D1): (a) visualizzare separatamente le perle bianche da quelle nere conduce alla rappresentazione 2×9+3×9; (b) 'vedere' il modulo conduce a (2+3)×9. Interpretiamo la dinamica della situazione di classe attraverso un modello:



Se un alunno (a), o uno (b), fosse solo, si limiterebbe alla sua personale modellizzazione mentale e alla conseguente rappresentazione esterna perché non sarebbe motivato a cercare *altre* modalità di interpretazione e quindi di conteggio. Un contratto didattico centrato sull'argomentazione collettiva favorisce invece *la condivisione* delle conoscenze: ogni alunno confronta la propria rappresentazione con l'altra e scopre che il suo non è l'unico modo di 'vedere' la collana. Si produce quindi un feed-back che influisce sulle rispettive rappresentazioni interne e sul modo nuovo in cui si può percepire la struttura della collana. La costruzione *sociale* delle conoscenze favorisce l'evoluzione del pensiero verso una conquista *condivisa* di nuovi *significati*. Superare la difficoltà iniziale di accogliere come *propria* l'altra versione è il primo passo verso la comprensione dell'*equivalenza* delle rappresentazioni: $2\times9+3\times9=(2+3)\times9$. Questo condurrà alla conquista del *significato generale* della scrittura $a\times c+b\times c=(a+b)\times c$ e quindi alla comprensione della proprietà distributiva.

C. Generalizzazione e concettualizzazione: la condensazione concettuale

La classe (10 anni) sta esplorando il comportamento di una bilancia a piatti come metafora dell'equazione di primo grado ad una incognita.

Teacher: Esponiamo la situazione?

Jacopo: Sul piatto di destra c'era bicarbonato e 100 grammi e sul piatto di sinistra tre bicchieri di bicarbonato.

Teacher: Noi cosa vogliamo arrivare a trovare?

Jacopo: Quanto pesa un bicchiere di bicarbonato.

Teacher: Ok. Cosa abbiamo fatto, Matteo?

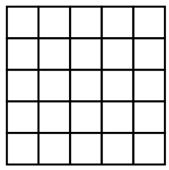
Matteo: Abbiamo tolto un bicchiere da entrambi i piatti, poi abbiamo diviso il contenuto dei piatti in due e sono rimasti a sinistra un bicchiere di bicarbonato e a destra 50 grammi. Un bicchiere pesa 50 grammi.

Ci riferiamo alla transizione dalla fase *dinamica* delle *attività generative concrete* che accompagnano il percorso educativo dell'alunno soprattutto nei primi otto anni di scuola a quella nella quale l'insegnante favorisce la *condensazione* in conoscenza dei concetti matematici soggiacenti le attività. Quella dell'esempio ha il compito di far nascere l'esigenza di individuare i *princìpi di equivalenza* come strumenti di rappresentazione delle esperienze svolte, e questi nuovi concetti verranno poi collegati alle conoscenze relative alle operazioni su numeri naturali e relativi, alle proprietà, all'uso delle lettere, al significato dell'uguale. Mediante la riflessione sulle esperienze svolte, gli alunni vengono guidati ad individuare *principi generali* che permettono di risolvere altre situazioni strutturalmente affini. Una conduzione *debole* da parte dell'insegnante di questa transizione non favorisce – o inibisce – il progressivo avvicinarsi alla generalizzazione, in quanto gli alunni continuano ad operare sul concreto senza elaborare alcuna teoria.

D1. Generalizzazione ed aspetti matematici fondativi: l'evoluzione delle strategie di conteggio

Nel corso di una collaborazione fra classi italiane del progetto ArAl e classi inglesi (alunni fra i 9 e i 15 anni) è stata proposta la seguente situazione:

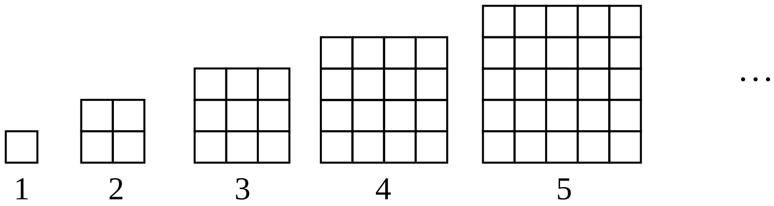
> Questo disegno rappresenta una costruzione fatta con degli stuzzicadenti.
> Contate il numero degli stuzzicadenti e spiegate in linguaggio matematico la vostra strategia. Non interessa che scriviate il numero totale degli stuzzicadenti.



Con gli alunni italiani (13 anni) sono state messe in discussione tre strategie prodotte dagli studenti inglesi (15 anni): (i) 5+5×11; (ii) 3×(3×5+1)+6+6; (iii) 5×4+5×4×2 ed è stato chiesto di interpretarle in modo da rendere trasparente il significato delle scritture. È risultato evidente che ogni strategia di conteggio rifletteva il modo in cui i gruppi avevano percepito la struttura della costruzione (vedi il § B). Ad esempio: gli alunni italiani hanno spiegato che i compagni del gruppo (i) avevano visto le cinque colonne come 'pettini' e ha poi avevano aggiunto gli ultimi cinque stuzzicadenti verticali). Lasciati liberi di contare, gli alunni hanno scoperto un numero consistente di strategie alternative, alcune più e altre meno economiche. Guidati a confrontare le scritture, hanno individuato equivalenze attraverso delle dimostrazioni, per esempio per (i) e (iii):

$$5+5\times11=5\times4+5\times4\times2 \rightarrow 5\times1+5\times11=5\times4+5\times8 \rightarrow 5\times(1+11)=5\times(4+8) \rightarrow 5\times12=5\times12$$

A partire da questa attività, la generalizzazione comincia a profilarsi quando la situazione da *statica* vien trasformata, per così dire, in *dinamica*, ossia quando si comincia ad esplorare come cambiano le strategie del conteggio se si cambiano le dimensioni del quadrato e si chiede se sia possibile individuare una 'legge' che permetta di trovare il numero di stuzzicadenti necessari per costruire una figura qualsiasi. Gli studenti scoprono che conviene organizzare una ricerca ordinata, ad esempio attraverso una disposizione dei disegni di questo tipo:



Vengono guidati ad attivare una strategia di conteggio degli stuzzicadenti comune ad ogni figura che esprima il loro numero in funzione del numero del suo posto e che possa essere espressa mediante una rappresentazione formale del numero degli stuzzicadenti di una costruzione al generico posto n. Pervengono quindi all'individuazione delle scritture che permettono di esprimere le relazioni che connettono i numeri in gioco in una certa situazione problematica e cioè la sua *struttura*. In questo caso (con n numero della posizione e s numero degli stuzzicadenti) scrivono per esempio $s=2n(n+1)$. Se l'insegnante concentra un'eccessiva attenzione sui *processi di calcolo* e trascura la riflessione su di essi impedisce agli allievi di realizzare quelle esperienze necessarie al processo di generalizzazione e alla concettualizzazione delle strutture aritmetiche.

D2. Generalizzazione ed aspetti matematici fondativi: la progressiva conquista del concetto di analogia strutturale

Rosa (grande della scuola dell'infanzia, 5 anni) sta confrontando dei 'treni' di cartone i cui vagoni contengono oggetti disposti in modo ordinato e si sta concentrando su due di essi in particolare.

Teacher: Perché stai guardando proprio questi due treni? Mi dici cosa contengono?

Rosa: Qui c'è uno rosso, uno rosso e uno giallo.

Teacher: Dei Duplo. Sì, e in questo?

Rosa: Una noce, una noce e un girasole e va avanti così.

Teacher: E allora?

Rosa: Sono quasi uguali.

Rosa, nell'esempio, sta facendo dell'algebra perché individua in modo naïf *l'analogia strutturale* fra i due treni. Sin dalla scuola dell'infanzia o dalla prima primaria gli alunni possono essere messi nella condizione di riconoscere *relazioni* fra gli elementi di una successione e il loro numero di posto. Di conseguenza scoprono *analogie* (in questo caso fra le strutture dei due treni), le descrivono a parole e le rappresentano con un codice (per esempio AAB) avvicinandosi così ad un embrione di linguaggio formalizzato e quindi alla generalizzazione. La costruzione comune del codice, sviluppata al livello consentito dall'età degli alunni, costituisce quindi il risultato *collettivo* di una lettura *relazionale* della situazione, in cui l'attenzione è puntata non tanto sui suoi elementi, quanto sulle relazioni che li collegano. Riuscire a stabilire tali corrispondenze fra situazioni differenti permette lo sviluppo del pensiero *analogico*. La scuola dell'infanzia si inserisce al primo gradino di questo processo, all’interno di una logica di continuità con la scuola primaria, dove questi embrioni di pensiero matureranno progressivamente nel tempo, intrecciati fra loro, nelle classi successive, attraverso l’esplorazione di un’aritmetica costruita nella prospettiva dello sviluppo del pensiero algebrico e quindi verso una generalizzazione più matura e un’astrazione più evoluta.

Conclusioni

Quanto esposto evidenzia condizioni che a nostro avviso vanno costantemente potenziate perché supportano il percorso verso la generalizzazione favorendo negli alunni gli aspetti *metalinguistici* e *metacognitivi* e quindi la riflessione: (A) sul *linguaggio*: la capacità di argomentare, di tradurre il linguaggio naturale nel linguaggio algebrico di produrre un pensiero originale; (B) sulle relazioni fra la *percezione* e la costruzione *sociale* di conoscenze condivise; (C) sul passaggio dalle attività *generative concrete* alla *costruzione dei concetti* (la condensazione concettuale); (D) su alcuni aspetti *matematici* fondativi: l’evoluzione delle strategie di conteggio, la progressiva conquista del concetto di analogia strutturale.

Bibliografia

Blanton, M. and Kaput, J.J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp.483-510). Advances in Mathematics Education: Springer.

Cooper, T.J. and Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students’ ability to generalize: models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp.483-510). Advances in Mathematics Education: Springer.

Cusi, A., Malara, N.A., Navarra G. (2011). Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Promoting a Linguistic and Metacognitive Approach to the Teaching and Learning of Mathematics. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp.483-510). Advances in Mathematics Education: Springer.

Fuji, T. and Stephens, M. (2001). Fostering understanding of algebraic generalization through numerical expressions: The role of quasi-variables. In H. Chick, K. Stacey, Jl. Vincent and Jn. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI*, vol. 1 (pp. 258-264). Melbourne.

Kaput, J., Carraher, D. and Blanton, M. (Eds.) (2007). *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). New York: Erlbaum.

Malara, N.A. & Navarra, G. (2001). “Brioshi” and other mediation tools employed in a teaching of arithmetic with the aim of approaching algebra as a language. In H. Chick, K. Stacey, Jl. Vincent and Jn. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI*, vol. 2 (pp. 412-419). Melbourne.

Malara, N.A. & Navarra, G. (2003). *ArAl Project: Arithmetic Pathways Towards Favouring Pre-Algebraic Thinking*. Bologna: Pitagora.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65–86). Kluwer: Dordrecht.

Radford, (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp.483-510). Advances in Mathematics Education: Springer.

Smith, J., & Thompson, P. W. (2007). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). New York: Erlbaum.

Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalization in words and in symbols. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th PME*, Vol. 5, pp. 377-384. Prague.